Ball Coverings and Products of Manifolds (曲面の位置の理論と関連する話題)

津久井, 康之

数理解析研究所講究録
297巻 1977年 85-91

Ball Coverings and Products of Manifolds

相模工大 津久井康之

Definition 1. M^m が compact connected (PL) m-manifold で，
M内の m-ball の finite set $\mathcal{B}=\{B_1^m, B_2^m, \cdots, B_k^m\}$ が，

(1) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i^m = M$,

をみたすとき $\mathcal{B}$ を M の weak ball covering，さらに，

(2) $B_i^m \cap B_j^m = \partial B_i \cap \partial B_j \qquad (i \neq j)$

(3) (2)の $(\partial B_i \cap \partial B_j)$ が (m−1)-manifold（Conn.を要求しない），

をみたすとき $\mathcal{B}$ を M の ball covering と呼ぶ。このとき

$\beta(M) = \min.\{\#\mathcal{B}\ ;\ \mathcal{B}$ は M の weak ball covering $\}$,

$b(M) = \min.\{\#\mathcal{B}\ ;\ \mathcal{B}$ は M の ball covering $\}$,

と定める。（$\#\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}$ の elements の数）

I. 〈Products of Manifolds〉

Theorem 1. M, N が connected compact PL manifolds のとき，

$$b(M \times N) \leqq b(M) + b(N) - 1 .$$

Theorem 2. V が connected compact PL manifold で $\partial V \neq \phi$ のとき $D(V)$ で V の double ($\cong \partial(V \times I)$) を表わす。

$$b(D(V)) \leqq b(V) + 1 \quad .$$

Corollary 1. $b(S^{p_1} \times S^{p_2} \times \cdots \times S^{p_m}) = m + 1$, ($p_i \geqq 1$).

Corollary 2. 任意の integers m, n ($2 \leqq m \leqq n+1$) に対して, $b(M^n) = m$ となる connected closed n-manifold M が存在する。

Remark 1. Corollary 1 には $S^{p_1} \times \cdots \times S^{p_m}$ に対する handle分解による大川氏(東大・理)の別証がある.

2. Theorem 1, 2 とも best possible であり, また等号の成立しない例は多くある。

次の lemma は induction によって証明される。

Lemma. M を connected compact manifold で $b(M) = k$ とするとき, 任意の自然数 n に対して, 条件 (※) をみたす M の ball coverings $\mathcal{B}_i = \{B_{i,1}, B_{i,2}, \cdots, B_{i,k}\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, が存在する。

$$(※) \qquad B_{i,j} \cap B_{p,q} = \phi \qquad \text{if} \begin{cases} (i,j) \neq (p,q) \\ i+j = p+q . \end{cases}$$

Theorem 1 の proof の outline: $b(M) = p$, $b(N) = q$ とする。lemma (N に対して) から, N の ball coverings

$$\mathcal{B}_i = \{B_{i,1}, B_{i,2}, \cdots, B_{i,q}\}, \quad i = 1, 2, \cdots, p,$$

が存在して(※)をみたす。$\{B_1, B_2, \cdots, B_p\}$ をMの ball coveringとすると,

$$M \times N = (B_1 \cup \cdots \cup B_p) \times N = \bigcup_{i=1}^{p} (B_i \times N)$$
$$= \bigcup_i \Big(B_i \times \bigcup_j B_{i,j} \Big) = \bigcup \Big\{ B_i \times B_{i,j} \ ; \ \begin{matrix} 1 \leqq i \leqq p \\ 1 \leqq j \leqq q \end{matrix} \Big\}.$$

このままでは $\{B_i \times B_{i,j}\}$ は definition 1 の(3)を満していない. ball $B_i \times B_{i,j}$ の regular neighborhood を順番に取り直してやることで新しく $M \times N$ の ball covering $\{C_{i,j}\}$ $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq j \leqq q$, が得られ,(※)をみたしていることが確かめられる。したがって順番に $\{C_{i,j} : i+j=k\}$ $k=2,3,\cdots,p+q$,を $\bigcup \partial C_{i,j}$ の上の arcs で結んで regular neighborhood をとることで $p+q-1$ 個の ballが得られ,作り方から $M \times N$ の ball coveringであることが確かめられる。

Theorem 2 の証明もほぼ同様である。

2. theoremsの詳しい証明は[14]にゆずって,ここでは(Weak) ball covering と Lusternik-Schnirelman category および product space 等の関係について述べてみよう。

Definition 2. (Lusternik-Schnirelman category) Xをpolyhedron(もっと広く topological spaceで良いがここでは必要でないので制限する)とする.

$\mathrm{cat}(X) = \min.\{ k \geqq 1 \mid U_i \ (1 \leqq i \leqq k)$ は X の open set で

Xにおいて contractibleで, $\bigcup_{i=1}^{k} U_i = X$ }

$$\mathrm{Cat}(X) = \min.\{k \geq 1 \mid U_i\ (1 \leqq i \leqq k) \text{ は } X \text{ の open set で } U_i \text{ 自身は contractible}, \ \bigcup_{i=1}^{k} U_i = X\}.$$

$\mathrm{Cat}(X)$ を strong category と呼ぶ。

Definition 3. M^m を closed m-manifold (Top. Diff. PL.–, 但しここでは PL-manifold で考える) とする.

$$C(M) = \min.\{k \geq 1 \mid B_i^m\ (1 \leqq i \leqq k) \text{ は } M \text{ 内の m-ball で}, \ \bigcup_{i=1}^{k} \mathring{B}_i = M\}. \qquad (M \text{ の cell number})$$

M が closed ならば weak ball covering は collar を使って $\cup \mathring{B}_i = M$ とできるので, $\beta(M) = C(M)$ である。

明らかに connected compact manifold M について,

$$\mathrm{cat}(M) \leqq \mathrm{Cat}(M) \leqq \beta(M) \leqq b(M).$$

cat, Cat は連続写像を通して他のさまざまな概念と関連し, homotopy 論との関係で早くから多くの研究がされている. cell number $C(M)$ ($=\beta(M)$) の概念は Lustennik-Schnirelmann category の manifold へのごく自然な拡張(制限)であるが, generalized Poincare Conjecture の解決をもたらした. Engulfing technique を得てはじめて研究されるようになったようで, 1960年代後半からこれについての論文が見られる. homotopy 論からわかれ *Geometry* な性格が強いが, Engulfing を手段とするため, connectivity や dimension の制限が強く,

この概念を用いて新しい結果を導き出すというよりは，今までに分っている結果を cell covering という見地から見直すという場合が多い．基本的なものとしては，

Proposition 1. （Luft [6]）

M^n: connected closed n-manifold, k-connected, $k \leqq n-3$

$$\Longrightarrow \quad \beta(M) \leqq \langle {}^{n+1}/_{k+1} \rangle,$$

$\langle x \rangle$ は integer で $\langle x \rangle \geqq x$ なる minimum.

これに対して ball covering は boundary を持つ manifold にまで cell covering を拡張したこと（cell covering は別に open manifold に対しても定義できる）。しかしその特徴は $B_i^m \cap B_j^m = \partial B_i \cap \partial B_j$ が (m-1)-manifold という点にあり，S^{m-1} 内の (m-1)-manifolds の homeo から1次元上の m-manifold の様子を知ろうという立場である。したがって cell covering (C( )) が Engulfing の活躍する6次元以上の manifold に対して威力があるのに対し，おそらく，もっと低次元での有効性が期待される。3次元の compact manifold M に対しては $\beta(M)=b(M)$ が証明される見込があり，4次元では contractible 4-manifold W^4 で，

$$\mathrm{cat}(W)=1, \quad \beta(W)=2, \quad b(W)=3,$$

なるものが存在するので，このへんが当面研究されるべきところであろう。もっとも，やさしくはなさそうであるが。

Product space に関しては,

Proposition 2.

(1) $\max.\{\mathrm{cat}(X), \mathrm{cat}(Y)\} \leqq \mathrm{cat}(X \times Y) \leqq \mathrm{cat}(X) + \mathrm{cat}(Y) - 1,$

(2) $\mathrm{Cat}(X \times Y) \leqq \mathrm{Cat}(X) + \mathrm{Cat}(Y) - 1,$

(3) $\mathrm{Cat}(X) \leqq \mathrm{cat}(X) + 1.$

という結果があり, Theorem 1. に対応している.

現在, $C(M)$ $(=\beta(M))$ についてはこのような product についての結果は得られていない。

REFERENCES

[1]R.H. Fox, On the Lusternik-Schnirelmann Category, Ann. of Math. 42(1941)333-370.

[2]L.C. Glaser, Intersections of combinatorial balls and of Euclidean Spaces, Trans. AMS. 122(1966)311-320.

[3]J.P. Hempel and D.R. McMillan Jr.,Covering three-manifolds with open cells, Fund. Math. 64(1969)99-104.

[4]K. Kobayashi and Y. Tsukui, The ball coverings of manifolds, J. Math.Soc. Japan 28(1976)133-143.

[5]——, ——, Manifold ノ Ball Covering ニツイテ, スウリケン.コウキユウロク 243(1975)77-87.

[6]E. Luft, Covering of manifolds with open cells, Illinois J. Math. 13(1969)321-326.

[7]M.V. Mielke, Spherical modifications and coverings by cells, Duke Math. J. 36(1968)49-53.

[8]D.A. Moran, Minimal cell coverings of some sphere bundles, Comment. Math.Univ. Carolinae 14(1973)647-650.

[9]——, Cell coverings and Residual sets of closed manifolds, ? (1976)516-518.

[10]R.R. Summerhill, A characterization of the connectivity of a manifold in terms of large open cells, Proc.AMS.45(1974)285-290.

[11]F. Takens, The Lusternik-Schnirelman categories of a product Space, Compositio Math. 22(1970)175-180.

[12]H. Toda and M. Mimura, ホモトピ°-ロン, キノクニヤ.スウガ゛クキ゛ヨウシヨ 3 (1975).

[13]Y. Tsukui, 1-conn. 4-manifold M^4 with $b(M)=3$ and $H_2(M)=Z$, スウリケン.コウキユウロク (to appear).

[14]——, On ball coverings for products of manifolds,(to appear)。

[15]K. Varadarajan, On fibrations and category, Math. Z.88(1965) 267-273.

[16]E.C. Zeeman, The Poincare conjecture for $n \geq 5$, Topology of 3-manifolds, Prentice Hall (1962)198-204.